

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A**

- 1.** Trei elevi E1, E2 și E3 își aleg, în aceasta ordine numerele reale  $x$ ,  $y$  și  $z$ , astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:
- $x$ ,  $y$  și  $z$ , să fie în progresie geometrică, în această ordine;
  - $x, 1+y, z$ , să fie în progresie aritmetică, în această ordine;
  - $x, 1+y, 2+z$ , să fie în progresie geometrică, în această ordine;
- 1<sup>o</sup>. Să se determine numerele reale  $x, y, z$ .
- 2<sup>o</sup>. Care sunt aceste progresii și rațiile lor ?

**Soluție:**

$$x \cdot z = y^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$x + z = 2(1 + y) \dots\dots\dots 1p$$

$$x(2 + z) = (1 + y)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } \begin{cases} x \cdot z = y^2 \\ x(z + 2) = (1 + y)^2 \rightarrow x \cdot z + 2x = 1 + 2y + y^2 \Rightarrow y = \frac{2x-1}{2} \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$z = 2(1 + y) - x = 2\left(1 + \frac{2x-1}{2}\right) - x = x + 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } x(x + 1) = \frac{(2x-1)^2}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = -\frac{3}{8} \text{ și } z = \frac{9}{8} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Obținem: } \left. \begin{array}{l} \frac{1}{8}; -\frac{3}{8}; \frac{9}{8}, \text{ cu } q_1 = -3 \\ \frac{1}{8}; \frac{5}{8}; \frac{9}{8}, \text{ cu } r = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8}; \frac{5}{8}; \frac{25}{8}, \text{ cu } q_2 = 5 \end{array} \right\} \dots\dots\dots 1p$$

- 2.** Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic în  $A$ , având catetele de lungimi  $AB = c$ ,  $AC = b$  și ipotenuza  $BC = a$ ,  $b > c$ . Dacă  $M, P, N \in (BC)$  sunt picioarele înălțimii, bisectoarei respectiv mediane din vârful  $A$ , demonstrați că:

a)  $a^2 \geq 2bc$ ;

b)  $\overrightarrow{BM} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \overrightarrow{BC}$  și  $\overrightarrow{BP} = \frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;

c)  $\overrightarrow{MP} = \frac{bc(b-c)}{a^2(b+c)} \cdot \overrightarrow{BC}$  și  $\overrightarrow{PN} = \frac{a^2}{2bc} \cdot \overrightarrow{MP}$ .

**Soluție:**

a)  $a^2 = b^2 + c^2 \geq 2bc \Leftrightarrow (b - c)^2 \geq 0$  (adevărat) ..... 2p

b)  $BM = \frac{c^2}{a}$  (teorema catetei)  $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \overrightarrow{BC}$  ..... 1p

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

$$BP = \frac{ac}{b+c} \text{ (teorema bisectoarei)} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC} \dots\dots\dots 1p$$

$$c) \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BM} = \frac{bc(b-c)}{a^2(b+c)} \cdot \overrightarrow{BC} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} - \frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b-c}{2(b+c)} \cdot \overrightarrow{BC} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overrightarrow{PN} = \frac{a^2}{2bc} \cdot \frac{bc(b-c)}{a^2(b+c)} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2bc} \cdot \overrightarrow{MP} \dots\dots\dots 1p$$

- 3.** Se dă mulțimea finită  $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n / n \geq 3\} \subset N^*$ . Se face o partiție a acestei mulțimi în două submulțimi ( $M = M_1 \cup M_2$ ) astfel încât prima submulțime să conțină două dintre elementele mulțimii  $M$ , iar cealaltă pe cele  $(n-2)$  rămase. Mulțimea  $M$  se numește **“articulată”** dacă produsul numerelor din prima submulțime este egal cu suma numerelor din cea de-a doua. Demonstrați că:
- Mulțimea  $A = \{2, 3, 6\}$  este **“articulată”**;
  - Mulțimea  $B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  este **“articulată”**;
  - Mulțimea  $C = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$  nu este **“articulată”**.

**Soluție:**

$$a) A = A_1 \cup A_2, \text{ unde } A_1 = \{2, 3\} \text{ și } A_2 = \{6\} \dots\dots\dots 2p$$

$$b) B = B_1 \cup B_2 \text{ cu } B_1 = \{a, b\}, \text{ unde } 1 \leq a < b \leq 10 \dots\dots\dots 1p$$

$$(Se \text{ arată foarte simplu că } ab + a + b = 55 \Rightarrow (a+1)(b+1) = 56)$$

$$\text{Suma numerelor din a doua submulțime este: } (1+2+3+\dots+10) - (a+b) = 55 - (a+b) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Trebuie să avem: } ab = 55 - (a+b) \Leftrightarrow ab + a + b + 1 = 56 \Leftrightarrow (a+1)(b+1) = 56$$

$$56 = 1 \cdot 56 \text{ sau } 56 = 2 \cdot 28 \text{ sau } 56 = 4 \cdot 14 \text{ sau } 56 = 7 \cdot 8$$

$$\text{Convine doar: } \begin{cases} a+1=7 \\ b+1=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=6 \\ b=7 \end{matrix} \quad B = B_1 \cup B_2 \equiv \{6, 7\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \dots\dots\dots 1p$$

c) Cu raționamentul de mai sus ar trebuie să avem:

$$(1+2+3+\dots+13) - (a+b) = ab \Leftrightarrow (a+1)(b+1) = 92 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dar } 92 = 1 \cdot 92 \text{ (nu convine) sau } 92 = 2 \cdot 46 \text{ sau } 92 = 4 \cdot 23 \Rightarrow b \in \{45, 22\}. \text{ Fals } \Rightarrow C \text{ nu este "articulată"} \dots\dots\dots 1p$$

- 4.** O foaie de hârtie a fost ruptă în 4 sau 7 bucăți. Se iau câteva dintre aceste bucăți și se rup, fiecare, în câte 4 sau 7 bucăți. Continuând procedeul de câteva ori, Andrei și Bogdan au numărat la final 2010, respectiv 2011 bucăți de hârtie. Cine poate avea dreptate, Andrei sau Bogdan?

**Soluție:**

$$\text{Prin ruperea unei bucăți în 4, numărul bucăților crește cu 3} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Prin ruperea unei bucăți în 7, numărul bucăților crește cu 6} \dots\dots\dots 1p$$

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

Continuând procedeul de mai multe ori numărul bucăților de hârtie devine  $(1+3a+6b)$ , unde  $a$

reprezintă numărul bucăților rupte în 4, iar  $b$  este numărul bucăților rupte în 7 ..... **2p**

$1+3a+6b=2010 \Leftrightarrow 3(a+2b)=2009$  (fals). *Andrei nu are dreptate* ..... **1p**

$1+3a+6b=2011 \Leftrightarrow 3(a+2b)=2010$  (posibil). *Bogdan poate avea dreptate* ..... **1p**

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**  
**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA A X A**

**1. Demonstrați că:**

a)  $\frac{x^2}{3} \geq 2x - 3$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ;

b)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ , pentru orice  $x, y \in (0, \infty)$ ;

c)  $\log_a 3 + \log_b 3 \geq 4 \log_{ab} 3$  pentru orice  $a, b \in (1, +\infty)$

d) Determinați numerele  $a, b \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ , dacă  $ab = 9$  și  $\log_a (2a - 3) + \log_b (2b - 3) \geq \log_a 3 + \log_b 3$

**Soluție:**

a) Inegalitatea este echivalentă cu  $(x - 3)^2 \geq 0, x \in \mathbb{R}$  ..... **1p**

b) Inegalitatea se reduce la  $(x - y)^2 \geq 0$  ..... **1p**

c)  $\log_a 3 + \log_b 3 = \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_3 b} \geq \frac{4}{\log_3 a + \log_3 b} = \frac{4}{\log_3 ab} = 4 \log_{ab} 3$  ..... **2p**

d) Conform a)  $\log_a (2a - 3) + \log_b (2b - 3) \leq \log_a \frac{a^2}{3} + \log_b \frac{b^2}{3} = 4 - \log_a 3 - \log_b 3$  ..... **1p**

Rezultă  $4 - \log_a 3 - \log_b 3 \geq \log_a 3 + \log_b 3 \Rightarrow \log_a 3 + \log_b 3 \leq 2$  ..... **1p**

Conform b)  $\log_a 3 + \log_b 3 \geq 2$ . Atunci  $\log_a 3 + \log_b 3 = 2$ , dar  $ab = 9$  rezultă  $a = b = 3$  ..... **1p**

**2. La un concurs de atletism participă liceele A, B, C, fiecare liceu cu câte 3 elevi. Punctajul final al fiecărui liceu se calculează adunând punctele obținute de elevii liceului respectiv. Elevului sosit pe locul  $k$  ( $k = \overline{1, 9}$ ) i se acordă  $\frac{10}{k}$  puncte. Juriul concursului a constatat următoarele condiții îndeplinite simultan:**

a) Oricare doi elevi nu au sosit în același timp;

b) Primele trei locuri au fost ocupate de elevi de la licee diferite;

c) Elevii liceului C au sosit unul după altul;

d) Fiecare elev de la liceul B avea chiar în față sa un elev de la liceul A.

Care este clasamentul final al celor trei licee în funcție de punctajul obținut de fiecare dintre ele?

**Soluție:**

Din b) și c) rezultă că elevii liceului C au ocupat locurile 3, 4 și 5 ..... **1p**

Elevii se vor distribui după tabloul:

Locul	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Elev de la liceul	A	B	C	C	C	A	B	A	B

Din b) și d) rezultă că locul 1 va fi ocupat de un elev de la A, iar pe locul 2 un elev de la B ..... **1p**

Din d) rezultă locurile 6 și 8 sunt ocupate de elevi de la liceul A, iar locurile 7 și 9 au fost ocupate de elevi de la liceul B ..... **1p**

Punctajele obținute sunt:

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

Liceul A:  $10 + \frac{10}{6} + \frac{10}{8} = \frac{310}{24} \approx 12,916$  puncte ..... **1p**

Liceul B:  $\frac{10}{2} + \frac{10}{7} + \frac{10}{9} = \frac{950}{126} \approx 7,539$  puncte ..... **1p**

Liceul C:  $\frac{10}{3} + \frac{10}{4} + \frac{10}{5} = \frac{470}{60} \approx 7,833$  puncte ..... **1p**

Ordinea ocupată de cele trei licee este: A - C - B ..... **1p**

- 3.** Păcală produce vin de tărie P% și ar putea umple un butoi în P ore. Tândală produce vin de tărie T% și ar putea umple același butoi în T ore. Lucrând împreună ei umplu butoiul în 6 ore. Ce tărie va avea vinul obținut astfel ?

**Soluție:**

Fie V – volumul butoiului.

**Într-o oră:**

Păcală umple  $\frac{V}{P}$  din butoi ..... **2p**

Tândală umple  $\frac{V}{T}$  din butoi ..... **1p**

Împreună  $\left(\frac{V}{P} + \frac{V}{T}\right)$  din butoi ..... **1p**

**În 6 ore:**  $6\left(\frac{V}{P} + \frac{V}{T}\right) = V$  ..... **1p**

Tăria:  $\frac{\left(\frac{V}{P} \cdot P\% + \frac{V}{T} \cdot T\%\right)}{\frac{V}{P} + \frac{V}{T}} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{1}{P} + \frac{1}{T}} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{1}{6}} = \frac{12}{100} = 12\%$  ..... **2p**

- 4.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  o funcție care verifică relația  $f(x+y) \geq f(x) \cdot f(y) \geq 2^{x+y}$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . Demonstrați că:

a)  $f(0) = 1$  ;

b)  $f(-x) = \frac{1}{f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$  ;

c)  $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$

**Soluție:**

a)  $x = y = 0 \Rightarrow f(0) \geq f^2(0) \geq 1 \Rightarrow f(0)(1 - f(0)) \geq 0, f(0) > 0 \Rightarrow f(0) \leq 1$  ..... **1p**

Cum  $f(0) \geq 1 \Rightarrow f(0) = 1$  ..... **1p**

b)  $y = -x \Rightarrow 1 = f(0) \geq f(x) \cdot f(-x) \geq 1$  ..... **1p**

c)  $f(x) \geq 2^x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  ..... **1p**

$f(-x) = \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{2^x} = 2^{-x}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \leq 2^x, x \in \mathbb{R}$  ..... **2p**

În concluzie,  $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$  ..... **1p**

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A**

**1.** Se consideră numerele reale  $a, b, c$ , funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2x + 3$  și determinanții

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ și } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}. \text{ Să se demonstreze că:}$$

a)  $\Delta_1 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ ;

b)  $\Delta_1 = \Delta_2$ ;

c) Pentru oricare trei puncte distincte situate pe graficul funcției  $f$  și având coordonatele numere întregi, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil prin 3.

**Soluție:**

a)  $\Delta_1 = \dots = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \dots\dots\dots 2p$

b)  $\Delta_1 = \dots = \Delta_2 \dots\dots\dots 2p$

c)  $A(a; f(a)), B(b; f(b)), C(c; f(c)) \in G_f \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} |\Delta_2| = \frac{1}{2} |(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)|$   
 $\dots\dots\dots 1p$

Dintre  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  două au aceeași paritate deci  $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$  se divide la 2, ceea ce înseamnă că  $S_{ABC} \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 1p$

Dacă dintre  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  cel puțin două dau același rest la împărțirea cu 3 atunci diferența lor se va divide la 3 iar, în caz contrar,  $(a+b+c)$  se divide la 3, deci  $S_{ABC} : 3 \dots\dots\dots 1p$

**2.** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $B = a \cdot I_3 + b \cdot A + c \cdot A^2$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

a) Calculați  $A^3$ ;

b) Demonstrați că  $A$  este inversabilă și calculați  $A^{-1}$ ;

c) Demonstrați că  $(a+b+c) \cdot \det B \geq 0$ , pentru orice  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , folosind, eventual, proprietățile determinanților pentru a calcula  $\det B$ .

**Soluție:**

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \dots\dots\dots 2p$

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

b) Din  $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I_3 \Rightarrow A$  este inversabilă și  $A^{-1} = A^2$  (sau determinare prin calcul direct:

$\det A \neq 0 \Rightarrow A$  este inversabilă cu  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$ ) ..... **2p**

c)  $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$  ..... **1p**

$\det B = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$  ..... **1p**

$\det B = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \Rightarrow (a+b+c) \cdot \det B \geq 0$  ..... **1p**

**3.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  verifică  $|\cos x - 2^x + f(x)| \leq x^2$ .

Demonstrați că:

a)  $f(0) = 0$ ;

b)  $f$  este continuă în  $x = 0$ .

c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

**Soluție:**

a)  $x = 0 \Rightarrow |f(0)| \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$  ..... **1p**

b)  $-x^2 \leq \cos x - 2^x + f(x) \leq x^2, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2^x - \cos x - x^2 \leq f(x) \leq 2^x - \cos x + x^2$  ..... **2p**

$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - \cos x - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (2^x - \cos x + x^2) = 0$  ..... **1p**

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f$  este continuă în  $x = 0$ , ..... **1p**

c)  $\frac{2^x - \cos x - x^2}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2^x - \cos x + x^2}{x}, (\forall) x > 0$ , deci există  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = \ln 2$  ..... **1p**

$\frac{2^x - \cos x - x^2}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{2^x - \cos x + x^2}{x}, (\forall) x < 0$ , deci există  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)}{x} = \ln 2$  ..... **1p**

**4.** Un călător parcurge dus-întors același traseu de lungime  $d$  în două zile, de fiecare dată în același interval orar, 8–12. În prima zi (la dus) o funcție continuă și monotonă  $f: [8;12] \rightarrow [0;d]$  exprimă distanța parcursă de călător pe traseu iar în doua zi (la întors) o altă funcție continuă și monotonă  $g: [8;12] \rightarrow [0;d]$  exprimă distanța parcursă de călător pe traseu în sens invers, până la fiecare moment orar  $t \in [8;12]$  (în care fracțiunile de oră se exprimă zecimal). Considerăm funcția  $F: [8;12] \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = f(t) + g(t) - d$ .

a) Calculați  $F(8)$  și  $F(12)$ .

b) Dacă  $t_0 \in [8;12]$  și  $F(t_0) = 0$ , demonstrați că la momentul  $t_0$  călătorul se află în același loc pe traseu atât la dus cât și la întors.

c) Demonstrați că există un punct pe traseul parcurs în care călătorul s-a aflat la aceeași oră atât la dus cât și la întors.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale si protecția mediului**

**Soluție:**

a)  $F(8) = f(8) + g(8) - d = 0 + 0 - d = -d$  ..... **1p**

$F(12) = f(12) + g(12) - d = d + d - d = d$  ..... **1p**

b) La momentul  $t_0$ ,  $f(t_0) + g(t_0) - d = 0$ , deci  $f(t_0) + g(t_0) = d$ , ..... **1p**

ceea ce arată că poziția pe traseu a călătorului la momentul  $t_0$  este aceeași și la dus și la întors .... **2p**

c)  $F(8) \cdot F(12) < 0$  și cum  $F$  este continuă ..... **1p**

există  $t_1 \in [8; 12]$  cu  $F(t_1) = 0$ , deci există un punct pe traseu în care călătorul s-a aflat la aceeași oră atât la dus cât și la întors ..... **1p**



**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A**

**1.** Considerăm mulțimea  $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 2b^2 = 1\}$

a) Demonstrați că  $G$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu înmulțirea numerelor reale și că  $(G, \circ)$  este grup.

b) Găsiți trei soluții ale ecuației  $x^2 - 2y^2 = 1$  în mulțimea numerelor naturale nenule.

c) Demonstrați că ecuația  $x^2 - 2y^2 = 1$  are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale.

**Soluție:**

a)  $x, y \in G \Rightarrow xy \in G$  ..... **1p**

“ $\circ$ ” este asociativă

$$e = 1 + 0\sqrt{2} \in G$$

$x = a + b\sqrt{2} \in G \Rightarrow x^{-1} = a - b\sqrt{2} \in G$  ..... **2p**

b) Perechea (3,2) este o soluție a ecuației ..... **1p**

Fie  $x = 3 + 2\sqrt{2} \in G$ , conform a) avem  $x^2 = 17 + 12\sqrt{2} \in G \Rightarrow (17, 12)$ , soluție

$x^3 = 99 + 70\sqrt{2} \in G \Rightarrow (99, 70)$ , soluție ..... **1p**

c)  $x = 3 + 2\sqrt{2} \in G \Rightarrow x^n \in G, \forall n \in \mathbb{N}^*$  ..... **1p**

$x < x^2 < x^3 < \dots$ , rezultă  $G$  infinită și de aici concluzia ..... **1p**

**2.** Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$  și  $F(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_1^x f(t) dt$

a) Să se demonstreze că  $F$  este monoton crescătoare.

b) Calculați  $\int_0^1 xf(x) dx$ .

c) Calculați  $\int_0^1 F(x) dx$ .

**Soluție:**

a)  $F'(x) = f(x) = e^{-x^2} > 0$  ..... **1p**

$F$  crescătoare ..... **1p**

b)  $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$ . Notăm  $x^2 = t$  ..... **1p**

$I = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t} dt$  ..... **1p**

$I = -\frac{1}{2} e^{-t} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2e}$  ..... **1p**

c)  $J = \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 x' F(x) dx = xF(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xF'(x) dx$  ..... **1p**

$J = F(1) - \int_0^1 xf(x) dx = -\int_0^1 xf(x) dx = \frac{1-e}{2e}$  ..... **1p**

**3.** Considerăm polinomul  $f = ax^4 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$

a) Demonstrați că  $f(x) - f(y)$  se divide cu  $x - y$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y$ .

b) Demonstrați că, dacă  $f(2) = 0$ , atunci  $f(5) \neq 7$ .

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**

**Filiera tehnologica: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului**

c) Dacă  $f(1) = 3$  și  $f(2) = 5$ , demonstrați că  $f$  nu are rădăcini întregi.

**Soluție:**

a)  $f(x) - f(y) = a(x^4 - y^4) + b(x - y)$  ..... 1p

$(x^4 - y^4) : (x - y)$ , deci  $f(x) - f(y) : (x - y)$  ..... 1p

b) Dacă  $f(5)=7$ , atunci  $[f(5)-f(2)]:3$  ..... 1p

Rezultă  $7:3$ , imposibil ..... 1p

c) Fie  $x_0 \in \mathbb{Z}$ , rădăcină, deci  $f(x_0)=0$  ..... 1p

$[f(1)-f(x_0)]:(1-x_0) \Rightarrow 3:(1-x_0) \Rightarrow x_0 = \text{par}$  ..... 1p

$[f(2)-f(x_0)]:(2-x_0) \Rightarrow 5:(2-x_0) \Rightarrow x_0 = \text{impar}$ , imposibil ..... 1p

**Soluție alternativă**

b)  $f(2) = 0, f(5) = 7 \Rightarrow 16a + 2b + c = 0; \quad 625a + 5b + c = 7$  ..... 1p

Rezultă  $609a + 3b = 7$ , imposibil ..... 1p

c)  $f(1) = 3, f(2) = 5, a + b + c = 3, 16a + 2b + c = 5$ , deci  $b = 2 - 15a, c = 1 + 14a$  ..... 1p

$f(x_0) = 0 \Rightarrow ax_0^4 + (2-15a)x_0 + 1 + 14a = 0$  ..... 1p

$a(x_0^4 - 15x_0 + 14) + 2x_0 + 1 = 0$ , imposibil deoarece  $x_0^4 - 15x_0 + 14 = \text{par}$  și  $x_0 + 1 = \text{impar}$  ..... 1p

**4.** Într-un plan raportat la un sistem ortogonal de axe de coordonate (xOy) se deplasează o furnică inteligentă. Ea pleacă din A(1,3) și merge până în B(2,12) străbătând un drum ce reprezintă graficul unei funcții continue  $f: [1,2] \rightarrow (0, \infty)$ . Furnica constată că în orice punct M(x,y) (situat pe graficul funcției) ar fi ea, diferența dintre  $\frac{1}{3}$  din produsul coordonatelor punctului M și aria subgraficului funcției f pe  $[1,x]$  este egală cu 1.

a) Demonstrați că  $\frac{1}{3}xf(x) - \int_1^x f(t)dt = 1, x \in [1,2]$ .

b) Demonstrați că f este derivabilă și că  $xf'(x) = 2f(x), x \in [1,2]$

c) Determinați funcția f.

**Soluție:**

a) aria subgraficului funcției f pe  $[1,x]$  este  $\int_1^x f(t)dt$  ..... 1p

$M(x,y) \in G_f$  rezultă  $y = f(x)$  ..... 1p

Deducem  $\frac{1}{3}xf(x) - \int_1^x f(t)dt = 1$  ..... 1p

b)  $f(x) = \frac{1}{x} \left( 3 + 3 \int_1^x f(t)dt \right) \Rightarrow f$  derivabilă pe  $[1,2]$  ..... 1p

Derivând relația de la a)  $x f'(x) + f(x) - 3f(x) = 0 \Rightarrow x f'(x) = 2f(x)$  ..... 1p

c)  $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \ln f(x) = 2 \ln x + \ln c \Rightarrow f(x) = cx^2$  ..... 1p

Din  $f(1) = 3$  rezultă  $c = 3$  și  $f(x) = 3x^2$  ..... 1p